第 2 章　导数与微分

基础知识与规律总结

2.1　导数与微分

一、基本概念、性质和定理

1. 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 Δx，函数 y 相应地得到增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数在点 x_0 处可导，该极限值称为函数在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，$y'(x_0)$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

令 $x_0+\Delta x=x$，则(1)$\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. (2)

注1 ① $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 表示因变量 y 在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率；

②$f'(x_0)$ 表示因变量 y 在点 x_0 处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度，即导数反映了函数的变化率.

③ 由(1)式可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)，其中\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$$

于是 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，两边取 $\Delta x\to 0$ 时的极限，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)]=0.$$

定理　一元函数可导必连续. 即，设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续；反之不真，即连续未必可导.

【例 2.1】已知 $f(x)=x(x+1)\cdots(x+100)$，求 $f'(-2)$.

【解】$f'(-2)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$，而 $f(-2)=0$，则

$$\begin{aligned}f'(-2)&=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}{x+2}\\&=\lim_{x\to -2}x(x+1)(x+3)\cdots(x+100)\\&=-2\times(-1)\times 1\times 2\times\cdots\times 98=2\times 98!.\end{aligned}$$

注2 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} \text{ 与 } \lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}$$ 必存在，反之则未必.

【例 2.2】设 $f'(x_0)$ 存在，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；　　(2) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}$.

【解】(1) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{-3\Delta x}\cdot(-3)=-3f'(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}\cdot(-2)-\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\cdot3=-5f'(x_0)$.

【例 2.3】设 $f(x)$ 连续，$f'(0)>0$，则存在一个 $\delta>0$

(A) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)$ 单增　　(B) 当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f(x)$ 单减

(C) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)>f(0)$　　(D) 当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f(x)>f(0)$

【分析】凡遇到题设中给出函数在某一点的导数符号，要想到导数的极限定义式.

【解】$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$，则由极限的保号性，存在一个 $\delta>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，恒有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0\Rightarrow f(x)>f(0)$，故(C)项正确.

注 函数在一点的导数在该点的邻域内并不具有保号性.

2. 左右导数(单侧导数)

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 中自变量的变化趋势为 $\Delta x\to0$，若是 $\Delta x\to0^+$ 时极限存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点右导数存在；若是 $\Delta x\to0^-$ 时极限存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点左导数存在. 记作：

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

注 ① 导数定义中是 $\Delta x\to0$，由 $\Delta x\to0^+$ 或 $\Delta x\to0^-$ 时极限存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，只能得出函数在该点右导数或左导数存在，而不能得出函数在该点存在导数.

② 左右导数存在可推得函数在该点连续.

【例 2.4】判断函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

【解】因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，所以 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处左右导数存在，但不相等，即在 $x=0$ 处不可导，但 $\lim\limits_{x\to0^+}|x|=\lim\limits_{x\to0^-}|x|=0$，所以 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 2.5】设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$

【解】(A)、(C) 项极限式的分母均为 h^2，而 $\lim\limits_{h\to0}h^2=0^+$，所以可排除(A)(C).

对于(D) 项，令 $f(x)=\begin{cases}1, x\neq0\\0, x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导，但 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim\limits_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$ 存在. 所以排除(D).

故选(B).

定理 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

注 该定理常用来判定分段函数在分段点处的可导性.

【例 2.6】设 $f(x)=\begin{cases}x(x^2-4), & 0\leqslant x\leqslant2\\kx(x+2)(x+4), & -2\leqslant x<0\end{cases}$，问 k 为何值时，$f'(0)$ 存在?

【解】因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)-0}{x}=8k;$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-4)-0}{x}=-4.$$

所以，$f'(0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(0)=f'_+(0)\Leftrightarrow 8k=-4\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$.

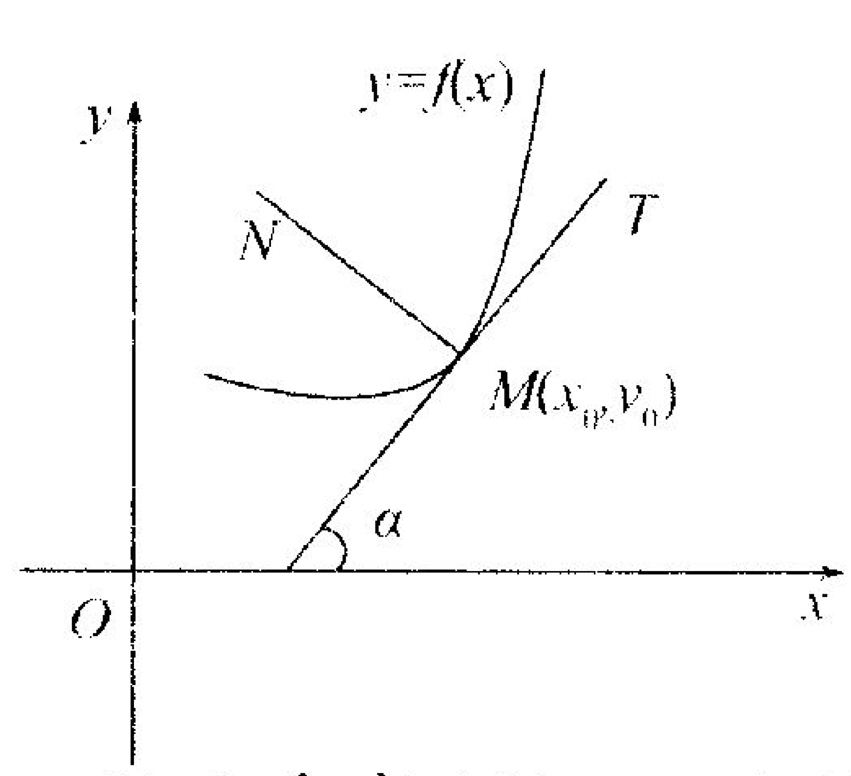
故当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f'(0)$ 存在.

3. 导函数

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为可导函数. 对于 (a,b) 内的可导函数来说，每一个 $x\in(a,b)$，都有 f 的一个导数值 $f'(x)$ 与之相对应，这样就得到一个定义在 (a,b) 内的函数，称为 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的导函数，记作 $f'(x)$ 或者 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$(注：求极限时，将 x 看做常量).

4. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率 $\tan\alpha$，即 $f'(x_0)=\tan\alpha$.



(1) 当 $f'(x_0)$ 存在时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线 MT 的方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0);$$

若 $f'(x_0)=\infty$，则切线方程为 $x=x_0$.

(2) 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线 MN 方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0);$$

(3) 当 $f'(x_0)=0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线方程为 $x=x_0$.

注 若函数在某点不可导，不是说明没有切线，切线可能垂直于 x 轴.

二、导数公式和运算法则

1. 常用的导数公式

(1) $c'=0$（c 为常数）;

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 为实数），常用 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），特别 $(e^x)'=e^x$;

(4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，（$a>0$ 且 $a\neq 1$），特别 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)'=\cos x$;

(6) $(\cos x)'=-\sin x$;

(7) $(\tan x)'=\sec^2 x$;

(8) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(9) $(\sec x)'=\sec x\tan x$;

(10) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(11) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(12) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(13) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$;

(14) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;

(15) $\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

记住的窍门：凡是"正弦、正切"的导数的符号都为正；凡是"余弦、余切"的导数的符号都为负.

2. 导数的运算法则

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

(2) $(uv)'=uv'+u'v$，特别 $(cu)'=cu'$（c 为常数）;

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$（$v\neq 0$）；特别 $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$（$c$ 为常数）.

【例 2.7】 设 $f(x)=\ln\frac{x+3}{3x}$，求 $f'(x)$.

【解】 因为

$$f(x)=\ln\frac{x+3}{3x}=\ln(x+3)-\ln 3-\ln x,$$

所以

$$f'(x)=\frac{1}{x+3}-0-\frac{1}{x}=-\frac{3}{x(x+3)}.$$

【例 2.8】 已知函数 $y=x\ln x$，求 y'.

【解】$y'=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1.$

【例 2.9】已知函数 $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$，求 y'.

【解】$y'=\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cos x}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}.$$

【例 2.10】已知函数 $y=x\sec x-\tan x$，求 y'.

【解】$y'=(x\sec x-\tan x)'=(x\sec x)'-(\tan x)'$

$$=\sec x+x\sec x\tan x-\sec^2 x.$$

三、反函数、复合函数和隐函数的求导法则

1. 反函数的导数

设函数 $y=f(x)$ 单调可导，且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 单调可导，且有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$，即函数与其反函数的导函数互为倒数.

【例 2.11】假设 $y=\mathrm{e}^x+\ln x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

【解】$y'=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x\mathrm{e}^x+1}{x}$，则

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{x\mathrm{e}^x+1}$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{x}{x\mathrm{e}^x+1}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x}{x\mathrm{e}^x+1}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$

$$=\frac{x\mathrm{e}^x+1-x(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}\cdot\frac{x}{x\mathrm{e}^x+1}=\frac{x(1-x^2\mathrm{e}^x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^3}.$$

2. 复合函数求导法则

设 $y=f(u),u=\varphi(x)$，f,φ 均可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 对 x 可导，且有 $y'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$（实际上从最外层往里一层层求，注意次序），即复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

注 对复合函数求导时，先将复合函数的结构搞清楚，再按法则计算.

【例 2.12】设 $y=xf(\cos x)$，f 一阶可导，求 y'.

【解】$y'=f(\cos x)-x\sin xf'(\cos x)$.

【例 2.13】设 $y=f^n(\varphi^m(\mathrm{e}^{x^2}))$，$f,\varphi$ 均可导，求 y'.

【解】$y'=nf^{n-1}(\varphi^m(\mathrm{e}^{x^2}))\cdot f'(\varphi^m(\mathrm{e}^{x^2}))\cdot m\varphi^{m-1}(\mathrm{e}^{x^2})\cdot\varphi'(\mathrm{e}^{x^2})\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x$.

【例 2.14】设 $y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $y'(0)$.

【解】$y'(0)=f'\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'\Big|_{x=0}=\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}\Big|_{x=0}=\arctan 1\cdot 2=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 隐函数求导法则

先确定因变量和自变量，然后可利用以下方法.

(1) 方程两边对自变量 x 求导，切记因变量 y 是 x 的函数，y 的函数是 x 的复合函数.

(2) 利用一阶微分形式不变性(见本章四(3))，在方程两边求微分，然后解出 $\dfrac{dy}{dx}$.

(3) 直接利用公式 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$，其中 $F'_y(x,y)\neq 0$(见第 7 章).

【例 2.15】 设方程 $xy^2+e^y=\cos(x^2+y^2)$，求 y'.

【解】方法一： 两边对 x 求导得

$y^2+2xyy'+e^yy'=-\sin(x^2+y^2)(2x+2yy')$，则

$$y'=-\frac{y^2+2x\sin(x^2+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2)}.$$

方法二： 两边微分得

$d(xy^2+e^y)=d(\cos(x^2+y^2))$

$\Rightarrow y^2dx+2xydy+e^ydy=-\sin(x^2+y^2)(2xdx+2ydy)$

$\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2+2x\sin(x^2+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2)}$.

【例 2.16】 设 $xy=e^{x+y}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 两边对 x 求导得

$y+xy'=e^{x+y}(1+y')$ ①

$\Rightarrow(x-e^{x+y})y'=e^{x+y}-y$

$\Rightarrow y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$.

① 式两边再对 x 求导，得

$y'+y'+xy''=e^{x+y}(1+y')^2+e^{x+y}y''$

$\Rightarrow(x-e^{x+y})y''=e^{x+y}(1+y')^2-2y'=e^{x+y}\left(1+\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}\right)^2-2\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$

$\Rightarrow y''=\dfrac{e^{x+y}(x-y)^2}{(x-e^{x+y})^3}-\dfrac{2(e^{x+y}-y)}{(x-e^{x+y})^2}$.

四、微分

1. 定义

如果 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内有定义，当自变量在 x 处取得改变量 Δx 时，函数 y 的改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x,$$

其中 A 是与 Δx 无关的 x 的函数，α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量，则称 $y=f(x)$ 在 x 处可微，并

称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x 处的微分，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x$. 当 $f'(x)\neq 0$ 时，$\mathrm{d}y$ 称为 Δy 的线性主部（当 $\Delta x\to 0$ 时）.

由于当 x 为自变量时，$\mathrm{d}x=\Delta x$，同时可证 $f'(x)=A$，所以又有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$. 可见，导数 = 函数微分 / 自变量微分，因此导数也称微商.

定理 可导和可微的关系

$$f(x)\text{ 可微}\Leftrightarrow f(x)\text{ 可导}.$$

2. 微分的运算法则

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，则（注：为了比较，特将导数的运算法则列出）

导数的运算法则	微分的运算法则
(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$	(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$
(2) $(uv)'=uv'+u'v$，特别 $(cu)'=cu'$（c 为常数）	(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$，特别 $\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u$（$c$ 为常数）
(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$，特别 $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{cv'}{v^2}$（$c$ 为常数）	(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$ $(v\neq 0)$，特别 $\mathrm{d}\left(\dfrac{c}{v}\right)=-\dfrac{c\mathrm{d}v}{v^2}$（$c$ 为常数）

3. 复合函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 的微分

因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x)$，所以 $\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$，而 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$，故 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 仍成立.

即对函数 $y=f(u)$ 而言，无论 u 是否为自变量，其一阶微分的形式都相同，均为 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$. 此性质称为一阶微分形式不变性.

【例 2.17】 设方程 $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\mathrm{d}y$.

【解】 方程两边对 x 求导，得

$$\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}\Rightarrow 2x+2yy'=xy'-y\Rightarrow y'=\frac{2x+y}{x-2y}.$$

则 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{2x+y}{x-2y}\mathrm{d}x$.

五、高阶导数

1. 定义

定义函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x 处的导数为 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶导数，记为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，$f''(x)$，即 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$.

同样可定义 $y=f(x)$ 的 n 阶导数为 $f^{(n)}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$.

常用函数的 n 阶导数.

(1) $(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,

特别当 m 为正整数时，$(x^m)^{(n)}=\begin{cases}m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n\leqslant m;\\ 0, & n>m\end{cases}$

(2) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\,(a>0$ 且 $a\neq 1)$，特别地，$(e^x)^{(n)}=e^x$；

(3) $\left[\dfrac{1}{(ax+b)^m}\right]^{(n)}=\dfrac{(-1)^n m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)a^n}{(ax+b)^{m+n}}\,(a\neq 0)$；

(4) $[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$；

(5) $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(6) 莱布尼兹公式：若 $u(x),v(x)$ 均 n 阶可导，则

$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$，其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$，一般多项式选作 v.

2. 高阶导数的计算

计算简单函数 $f(x)$ 的高阶导数时，先设法将 $f(x)$ 表示成一些常用函数，如 x^m, a^x，$\dfrac{1}{(ax+b)^m}$，$\ln(ax+b)$，$\sin(ax+b)$，$\cos(ax+b)$ 等的线性组合，然后再利用常用函数的 n 阶导数求导.

【例 2.18】 设 $y=x(2x+3)^2(3x-1)^3$，求 $y^{(6)}$.

【解】 $y=2^2 3^3 x^6+P_5(x)$，

如果求导次数超过多项式的最高次幂，则结果为零，即 $(P_5(x))^{(6)}=0$.

所以 $y^{(6)}=2^2 3^3 6!$.

【例 2.19】 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$，求 $f^{(n)}(x)$.

【解】
$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1},$$

则有
$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2},\ f''(x)=(-1)^2\frac{2!}{(x-1)^3},\cdots.$$

所以 $f^{(n)}(x)=(x+1)^{(n)}+\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}\quad(n\geqslant 2)$.

【例 2.20】 求下列各函数的高阶导数.

(1) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x$，求 $f^{(100)}(\pi)$；

(2) $f(x)=\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x$，求 $f^{(n)}(x)$.

(3) $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$，求 $f^{(n)}(x)$.

【解】 (1) 因为 $f^{(n)}(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)+2^n\cos\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

所以 $f^{(100)}(\pi)=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\sin\left(\frac{\pi}{2}+100\cdot\frac{\pi}{2}\right)+2^{100}\cos\left(2\pi+100\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2^{100}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+50\pi\right)+2^{100}\cos(2\pi+50\pi)=\frac{1}{2^{100}}+2^{100}$.

(2) 因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x$

$=\frac{1}{4}\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x$

$=\frac{1}{8}\sin 8x\cdot\cos 8x=\frac{1}{16}\sin 16x$,

所以 $f^{(n)}(x)=\frac{1}{16}(16)^n\sin\left(16x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(16)^{n-1}\sin\left(16x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) 因为 $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$

$=\sin 2x\cdot\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$

$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x$

$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x)$

$=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x)$,

所以 $f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}[(\sin 2x)^{(n)}+(\sin 4x)^{(n)}-(\sin 6x)^{(n)}]$

$=\frac{1}{4}\left[2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

$=2^{n-2}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^{n-1}\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-9\cdot6^{n-2}\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

六、参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定的函数的导数

设 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\varphi(t),\psi(t)$ 均二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

注 求二阶导数时千万不要忘了乘以 $\frac{dt}{dx}$.

【例 2.21】 设曲线方程为 $\begin{cases}x=a\sin 2\theta\cos\theta\\y=a\sin 2\theta\sin\theta\end{cases}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

【解】 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{2a\cos 2\theta\sin\theta+a\sin 2\theta\cos\theta}{2a\cos 2\theta\cos\theta-a\sin 2\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-1.$

【例 2.22】设 $\begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = \sin t^2 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】$dx = -2t\sin t^2 dt, dy = 2t\cos t^2 dt$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t^2; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(-\cot t^2) \cdot \frac{dt}{dx} = \csc t^2 \cdot 2t \cdot \frac{1}{-2t\sin t^2} = -\csc^2 t^2.$$

2.2 各种函数的导数的解法

一、幂指函数的导数

幂指函数的形式为 $y = u(x)^{v(x)}$，$u(x) > 0$，且 $u(x) \neq 1$.

求幂指函数的导数有两种方法.

(1) 利用对数恒等式将幂指函数写成 $y = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$，再按复合函数求导法则求 $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = e^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$= u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

(2) 两边取对数，得到隐函数 $\ln y = v(x)\ln u(x)$，然后按隐函数求导数的思路求 $\dfrac{dy}{dx}$.

【例 2.23】已知 $x^y = y^x$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

【解】方程两边取对数有 $y\ln x = x\ln y$.

两边对 x 求导得 $\qquad y'\ln x + \dfrac{y}{x} = \ln y + x\dfrac{y'}{y}$，

解得 $y' = \dfrac{y(y - x\ln y)}{x(x - y\ln x)}$，而 $x = 1$ 时，$y = 1$.

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 1$.

【例 2.24】设 $y = \left(\sin\dfrac{x}{1+x}\right)^{\ln(1+x)}$，求 y'.

【解】函数两边取对数，得

$$\ln y = \ln(1+x) \cdot \ln\sin\frac{x}{1+x}.$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = [\ln(1+x)]'\ln\sin\frac{x}{1+x} + \ln(1+x)\left(\ln\sin\frac{x}{1+x}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+x}\ln\sin\frac{x}{1+x} + \ln(1+x)\cot\frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}.$$

故 $y' = y\left[\dfrac{1}{1+x}\ln\sin\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\cot\dfrac{x}{1+x}\right]$

$$=\left(\sin\frac{x}{1+x}\right)^{\ln(1+x)}\left[\frac{1}{1+x}\ln\sin\frac{x}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\cot\frac{x}{1+x}\right].$$

二、函数表达式为若干因子连乘积或商形式的函数的导数或微分的求法

方法：两边取对数，然后按隐函数求导法则做．取完对数求导时切记 y 是 x 的函数．

【例 2.25】 设 $y=x\sin x\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}\ln x}}$，求 y'．

【解】 函数两边取对数得

$$\ln y=\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{3}\ln(x-2)-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln\ln x.$$

上式两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\cot x+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{x}{3(x^2+2)}-\frac{1}{3x\ln x}.$$

故 $$y'=y\left[\frac{1}{x}+\cot x+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{x}{3(x^2+2)}-\frac{1}{3x\ln x}\right]$$

$$=x\sin x\sqrt[3]{\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}\ln x}}\left[\frac{1}{x}+\cot x+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{x}{3(x^2+2)}-\frac{1}{3x\ln x}\right].$$

三、分段函数的导数

（1）各区间段内导数的求法和前面所讲的导数的求法无异，要注意的是分段点处的导数一定要用导数的定义求．若分段函数在分段点两侧表达式不同，则要分别求其左右导数，当且仅当左、右导数存在且相等时，函数在分段点的导数才存在．

（2）含绝对值符号的函数，一般先去掉绝对值符号，然后再作判断或求解．

【例 2.26】 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-2x), & x\leqslant 0\\ \dfrac{\cos 2x-1}{x}, & x>0\end{cases}$，求 $f'(x)$．

【解】 当 $x<0$ 时，$f'(x)=[\ln(1-2x)]'=-\dfrac{2}{1-2x}$；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{\cos 2x-1}{x}\right)'=\dfrac{-2x\sin 2x-\cos 2x+1}{x^2}$；

当 $x=0$ 时，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=-2$．

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos 2x-1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}=-2.$$

所以，$f'(0)=-2$．

故 $$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{1-2x}, & x<0\\ -2, & x=0,\\ \dfrac{-2x\sin 2x-\cos 2x+1}{x^2}, & x>0\end{cases}$$

2.3 重要结论

1. 函数与其绝对值函数的导数的关系

(1) $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导推不出 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导. 如 $y=f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

(2) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导也推不出 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导. 如 $f(x)=x$.

记住：$y=|x-x_0|$ 在点 x_0 处不可导，但在点 x_0 处连续；

$y=(x-x_0)|x-x_0|$ 在点 x_0 处可导.

【例 2.27】 $y=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】 $y=(x^2-x-2)|x^3-x|=(x-2)(x+1)|x(x-1)(x+1)|$.

立刻可得出函数在 $x=0, x=1$ 处不可导，故(C)项正确.

2. 函数与其导函数的性质

(1) 可导的奇函数的导函数为偶函数；可导的偶函数的导函数为奇函数.

$$f(x)=-f(-x)\Rightarrow f'(x)=f'(-x);\ f(x)=f(-x)\Rightarrow f'(x)=-f'(-x)$$

注 利用该性质可简化计算.

如，设 $f(x)=x\sin^2 x\cos x$，求 $f''(0)$.

$f(x)=x\sin^2 x\cos x$ 为奇函数，则其二阶导数 $f''(x)$ 仍为奇函数，直接可得 $f''(0)=0$.

(2) 可导的周期函数的导函数仍旧为周期函数，且周期不变.

即 $f(x+T)=f(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$.

【例 2.28】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则下列结论中正确的是

(A) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数.

(B) 若 $f(x)$ 为单调增加函数，则 $f'(x)$ 也是单调增加函数.

(C) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 也是偶函数.

(D) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 也是奇函数.

【解】 因为函数 $f(x)$ 为抽象函数，故可先用举反例法排除.

取 $f(x)=x^3, f'(x)=3x^2$ 可排除(B)(D)；

取 $f(x)=x^2, f'(x)=2x$ 可排除(C).

事实上，$f(x+T)=f(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$，故(A)项正确.

【例 2.29】 设 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的法线斜率.

【解】 由题设可知 $f(-x)=f(x)$，则 $-f'(-x)=f'(x)$.

又由 $2=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(1)$ 得 $f'(1)=-1$，于是

$$f'(-1)=-f'(1)=1.$$

故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的法线斜率 $k=-\dfrac{1}{f'(-1)}=-1$.

习 题 二

一、单项选择题

1. 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 等于

A. 6. B. -6. C. $\dfrac{1}{6}$. D. $-\dfrac{1}{6}$. 【 】

2. 设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

A. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

B. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$.

C. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$.

D. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$. 【 】

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处

A. 左右导数均存在. B. 左导数存在，右导数不存在.

C. 右导数存在，左导数不存在. D. 左右导数均不存在. 【 】

4. 设周期函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为4. 又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点$(5,f(5))$处的切线的斜率为

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 0. C. -1. D. -2. 【 】

5. 下列函数，在点 $x=0$ 处可导的是

A. $f(x)=x\,|x|$. B. $f(x)=|\sin x|$.

C. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$. D. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. 【 】

二、填空题

1. $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x\sin 3x})=$________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x>0\\ 1, & x=0\\ bx+c, & x<0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导，则$(a,b,c)=$________.

3. 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$________.

4. 设 $y=\arctan \mathrm{e}^x-\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$________.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$________.

6. 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\mathrm{d}y=$________.

7. 设(x_0,y_0)是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是________.

8. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''|_{x=\sqrt{3}}=$________.

三、计算题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}-x, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

2. 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)=kf(x+2)$，又 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x(x^2-4)$，

   (1) 求 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 处的表达式；

   (2) 问 k 为何值时，$f'(0)$ 存在.

4. 设曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 M 处的切线与直线 $x+3y+1=0$ 垂直，求该曲线在点 M 处的切线方程.

5. a、b 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 1\\ ax-b, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续且可导.

6. 设 $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

参　考　答　案

一、1. A　2. D　3. B　4. D　5. A

二、1. $e^{x\sin 3x}[\sin 3x+3x\cos 3x]dx$.　2. $(1,0,1)$　3. $b^2=4a^6$.

4. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\dfrac{e-1}{e^2+1}$.　5. $2e^3$.

6. $\dfrac{dx}{x(1+\ln y)}$.　7. $\dfrac{c}{a}\geqslant 0$（或 $ax_0^2=c$），b 任意.　8. $\dfrac{5}{32}$.

三、1. $f'(x)=\begin{cases}-\sin x, & x<\dfrac{\pi}{2}\\ -1, & x=\dfrac{\pi}{2}\\ -1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}=-\dfrac{\sin t}{2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

3. (1) $f(x)=kx(x+2)(x+4)$.

   (2) 当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(0)$ 存在.

4. 所求切线方程为：$y-0=3(x-1)$，即 $3x-y-3=0$.

5. 当 $a=-1$，$b=-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续又可导.

6. $f^{(n)}(x)=n!\left[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$.